

# Comparaison 2D/3D du transfert de chaleur au sein d'une enceinte carrée/cubique remplie d'air

S. MELLAH, N. BEN-CHEIKH, B. BEN-BEYA, T. LILI

Faculté des Sciences de Tunis (FST), Campus Universitaire, 1060 TUNIS (TUNISIE)

## Résumé :

*Nous présentons une étude de convection naturelle de type Rayleigh-Bénard, mettant en évidence les effets de certaines conditions aux limites sur le transfert de chaleur dans une enceinte cubique remplie d'air. Trois conditions aux limites portant sur la température et la vitesse des particules fluides au niveau des parois sont envisagées. Les résultats obtenus sont comparés au problème 2D. Nous montrons que pour une condition aux limites bien particulière les effets tridimensionnels sont négligeables et par conséquent on peut conclure qu'une telle configuration peut être assimilée à son équivalent en 2D.*

## Abstract :

*We present a study of Rayleigh-Bénard natural convection to highlight the effects of some boundary conditions about heat transfer in a cubic cavity filled with air. Three boundary conditions relative to temperature and velocity of fluid particles on walls of the cavity are considered. The obtained results are compared to the 2D problem. We prove that tridimensional effects are negligible for a particular boundary condition, consequently, we conclude that such configuration can be assimilated to its equivalent in 2D.*

**Mots clefs :** Transfert de chaleur, Convection naturelle, Simulation numérique directe, Cavité carré/cubique, Refroidissement composant électronique.

## 1 Introduction

Durant ces dernières années plusieurs études numériques et expérimentales concernant le phénomène de convection naturel au sein d'une cavité confinée ont été entreprises vu la nécessité de celle-ci dans l'industrie comme le refroidissement des équipements électronique, le chauffage et le refroidissement des bâtiments, etc. Chacune de ces études impose des conditions aux limites bien particulières. Plusieurs recherches comme celles de Ganzarolli et Milanez [1], Calcagni et al.[2], Aydin et Yang[3] et Sharif et Mohammad[4], se sont intéressées à l'étude du transfert de chaleur au sein d'une cavité chauffée par le bas et refroidie par les autres parois de la cavité auxquelles sont imposées différentes conditions aux limites. Dans ce travail, nous présentons une étude concernant la convection naturelle au sein d'une cavité cubique remplie d'air, dans le cas bidimensionnel et tridimensionnel, chauffée par le bas par une source de chaleur constante (composant électronique) et refroidie par les autres parois de l'enceinte auxquelles on impose différentes conditions aux limites et cela pour un nombre de Rayleigh allant de  $10^3$  à  $10^6$ . Certaines caractéristiques de l'écoulement comme le profil de température et l'évolution du transfert de chaleur au sein de la cavité sont présentées et discutées.

## 2 Description du problème

Le modèle physique bidimensionnel (CF-2D) considéré est représenté sur la figure(1). La dimension de la cavité carrée est  $L$ . Sur les parois verticales il est imposé une température constante  $T_c$ . Au centre de la paroi horizontale inférieure est situé, de manière symétrique, un composant électronique de largeur  $l$  représentant 40% de la largeur de la cavité, imposant un flux de chaleur constant ( $q''$ ). La paroi horizontale supérieure et les parties de la paroi horizontale inférieure non chauffées par le composant électronique sont considérées adiabatiques.

Pour le modèle physique tridimensionnel nous avons considéré trois configurations différentes. La première configuration (CF1-3D) représentée par la figure(2) impose comme conditions aux limites une température constante  $T_c$  au niveau des quatre parois verticales de l'enceinte, un flux de chaleur constant ( $q''$ ) est

imposé par le composant électronique. La paroi horizontale supérieure et les parties non chauffées de la paroi horizontales inférieure sont considérées adiabatiques. La deuxième configuration, (CF2-3D) impose presque les mêmes conditions aux limites que la première sauf que cette fois-ci les deux parois verticales frontales comme indiqué sur la figure(3) sont considérées adiabatiques.

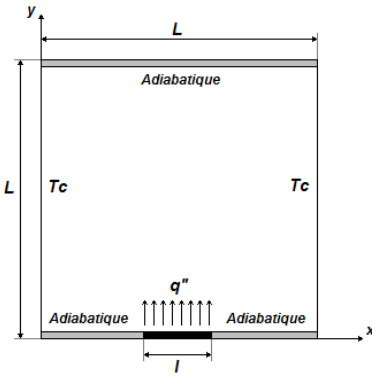


FIG. 1 – CF-2D.

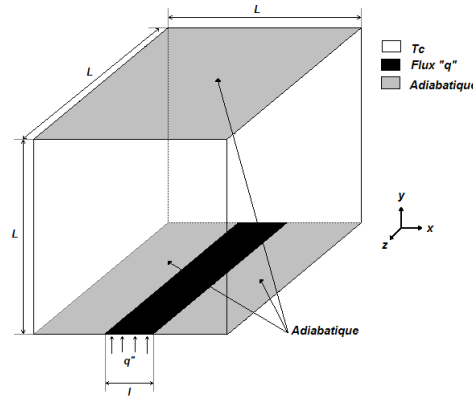


FIG. 2 – CF1-3D.

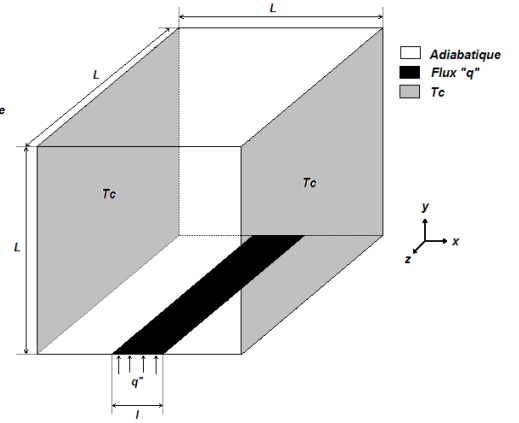


FIG. 3 – CF2-3D et CF3-3D.

La dernière configuration (CF3-3D) garde les mêmes conditions aux limites thermiques que la configuration (C2-3D) mais d'autres conditions aux limites sur la vitesse au niveau des parois sont considérées. Le cas (CF3-3D) consiste à donner aux particules fluides situées sur les deux parois verticales frontales adiabatiques de la cavité un degré de liberté (de rotation) en plus (conditions aux limites de type glissement). Les équations adimensionnelles gouvernant le problème de convection naturelle du fluide incompressible au sein de la cavité, après avoir pris compte des approximations de Boussinesq et utilisé comme vitesse caractéristique la vitesse de convection naturelle, sont les suivantes :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial(uu)}{\partial x} + \frac{\partial(uv)}{\partial y} + \frac{\partial(uw)}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \sqrt{\frac{\text{Pr}}{\text{Ra}}} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad (2)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial(uv)}{\partial x} + \frac{\partial(vv)}{\partial y} + \frac{\partial(vw)}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \sqrt{\frac{\text{Pr}}{\text{Ra}}} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \quad (3)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial(uw)}{\partial x} + \frac{\partial(vw)}{\partial y} + \frac{\partial(ww)}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \sqrt{\frac{\text{Pr}}{\text{Ra}}} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) + \theta \quad (4)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{\partial(u\theta)}{\partial x} + \frac{\partial(v\theta)}{\partial y} + \frac{\partial(w\theta)}{\partial z} = \frac{1}{\sqrt{\text{Ra Pr}}} \left( \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} \right) \quad (5)$$

Où :  $u$ ,  $v$  et  $w$  sont respectivement les vitesses adimensionnelles selon  $x$ ,  $y$  et  $z$ ,  $p$  : la pression adimensionnelle et  $\theta$  : la température adimensionnelle. Sachant que  $\theta = \frac{(T - T_c)}{\Delta T}$ , avec  $\Delta T = \frac{q'' L}{k}$ ,  $k$  : conductivité thermique de l'air. Les grandeurs caractéristiques utilisées afin d'obtenir ces équations adimensionnelles sont la vitesse caractéristique : vitesse de convection naturelle :  $u_0 = \sqrt{g \beta \Delta T L}$ , la longueur caractéristique :

$L$ , le temps caractéristique :  $t_0 = \frac{L}{u_0}$ , la pression caractéristique :  $p_0 = \rho u_0^2$ . Le nombre de Rayleigh est

$Ra = \frac{g\beta\Delta TL^3}{\nu\alpha}$  et le nombre de Prandtl est  $Pr = \frac{\nu}{\alpha}$ .  $\beta$  est le coefficient de dilatation thermique,  $\nu$  la viscosité cinématique et  $\alpha$  la diffusivité thermique.

Les conditions aux limites sont les suivantes :

✓ Conditions aux limites de la configuration bidimensionnelle CF-2D :

- $u = v = 0$  sur les parois solides.
- $\theta = 0$  pour  $x = 0$  et  $x = 1$  ( $0 \leq y \leq 1$ )
- $\frac{\partial \theta}{\partial y} = \begin{cases} 0 & \text{pour } 0 < x < 1 \text{ et } y=1 \\ 0 & \text{pour } 0 < x < 0,5 - 1/2 \text{ et } y=0 \\ -1 & \text{pour } 0,5 - 1/2 \leq x \leq 0,5 + 1/2 \text{ et } y=0 \\ 0 & \text{pour } 0,5 + 1/2 < x < 1 \text{ et } y=0 \end{cases}$

✓ Conditions aux limites des configurations tridimensionnelles :

1<sup>ère</sup> configuration 3D : CF1-3D :

- $u = v = w = 0$  sur les parois solides.
- $\theta = 0$   $\begin{cases} \text{pour } x = 0 \text{ et } x = 1 \text{ ( } 0 \leq y \leq 1 \text{ et } 0 \leq z \leq 1 \text{ )} \\ \text{pour } z = 0 \text{ et } z = 1 \text{ ( } 0 \leq x \leq 1 \text{ et } 0 \leq y \leq 1 \text{ )} \end{cases}$
- $\frac{\partial \theta}{\partial y} = \begin{cases} 0 & \text{pour } y=1 \text{ et } 0 < x < 1 \text{ et } 0 < z < 1 \\ 0 & \text{pour } y=0 \text{ et } 0 < x < 0,5 - 1/2 \text{ et } 0 < z < 1 \\ -1 & \text{pour } y=0 \text{ et } 0,5 - 1/2 \leq x \leq 0,5 + 1/2 \text{ et } 0 < z < 1 \\ 0 & \text{pour } y=0 \text{ et } 0,5 + 1/2 < x < 1 \text{ et } 0 < z < 1 \end{cases}$

2<sup>ème</sup> configuration 3D : CF2-3D :

- $u = v = w = 0$  sur les parois solides.
- $\theta = 0$  pour  $x = 0$  et  $x = 1$  ( $0 \leq y \leq 1$  et  $0 \leq z \leq 1$ )
- $\frac{\partial \theta}{\partial y} = \begin{cases} 0 & \text{pour } y = 1 \text{ et } 0 < x < 1 \text{ et } 0 < z < 1 \\ 0 & \text{pour } y = 0 \text{ et } 0 < x < 0,5 - 1/2 \text{ et } 0 < z < 1 \\ -1 & \text{pour } y = 0 \text{ et } 0,5 - 1/2 \leq x \leq 0,5 + 1/2 \text{ et } 0 < z < 1 \\ 0 & \text{pour } y = 0 \text{ et } 0,5 + 1/2 < x < 1 \text{ et } 0 < z < 1 \\ 0 & \text{pour } z = 0 \text{ et } 0 < x < 1 \text{ et } 0 < y < 1 \\ 0 & \text{pour } z = 1 \text{ et } 0 < y < 1 \text{ et } 0 < x < 1 \end{cases}$

3<sup>ème</sup> configuration 3D : CF3-3D :

Pour cette configuration, nous gardons les mêmes conditions aux limites portant sur la température que (CF2-3D), mais un changement a lieu sur celles concernant la vitesse des particules fluides situées sur les deux parois verticales adiabatiques de la cavité car un degré de liberté (de rotation) sur ces parois est permis (conditions aux limites de type glissement). Ainsi, les conditions aux limites portant sur la vitesse deviennent :

$$\frac{\partial u}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial z} = 0 \text{ et } w = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{pour } z = 0 \text{ et } 0 < x < 1 \text{ et } 0 < y < 1 \\ \text{pour } z = 1 \text{ et } 0 < x < 1 \text{ et } 0 < y < 1 \end{array} \right.$$

et  $u = v = w = 0$  sur toutes les autres parois solides.

Pour étudier le transfert de chaleur au sein de la cavité nous ferons appel au nombre de Nusselt. Le nombre

de Nusselt local et le nombre de Nusselt moyen sont définis respectivement par :

$$Nu_l = \frac{1}{\theta_s(x)} \quad \text{et} \quad Nu = \frac{1}{l} \int_0^l \frac{1}{\theta_s(x)} dx$$

$\theta_s(x)$  : température locale adimensionnelle située sur la surface de la source de chaleur.

### 3 Procédure numérique

La résolution des systèmes d'équations est effectuée à l'aide d'une approche de simulation numérique directe (DNS). Cette approche numérique consiste à utiliser la méthode des volumes finis préconisée par Patankar [5] et une méthode de projection pour résoudre le couplage vitesse-pression [6-7]. Comme solveur nous avons utilisé la méthode itérative SOR (Successive Over Relaxation) et pour minimiser le temps de calcul et accélérer la méthode SOR, la technique multi grilles [8-9] a été utilisée. Cette méthodologie a été en premier lieu validée dans le cas bidimensionnel, avec les résultats de l'étude de Muhammad Sharif et Taquiur Rahman Mohammad [4]. Leur étude concerne la convection naturelle au sein d'une cavité avec un flux de chaleur constant imposé sur la paroi horizontale inférieure et une température constante sur les parois verticales de la cavité. Une comparaison des résultats 2D obtenus par notre code et ceux obtenus par [4] est présentée dans le tableau (1).

		Etude [4]	Prés.étude	
Maillage		70x70	64x64	96x96
$Gr = 10^3$	Nu	4,085	4,073	4,077
	$\theta_s^{\max}$	0,274	0,275	0,274
$Gr = 10^4$	Nu	4,132	4,125	4,129
	$\theta_s^{\max}$	0,275	0,275	0,275
$Gr = 10^5$	Nu	6,058	6,039	6,027
	$\theta_s^{\max}$	0,210	0,209	0,210
$Gr = 10^6$	Nu	10,572	10,463	10,458
	$\theta_s^{\max}$	0,141	0,142	0,142

Tableau. 1 – Comparaison des résultats de la présente étude avec ceux de la référence [4].

Gr : nombre de Grashof (  $Gr = \frac{Ra}{Pr}$  ), Nu : nombre de Nusselt moyen,  $\theta_s^{\max}$  : température maximale à la surface de la source de chaleur.

On constate un bon accord de nos résultats avec ceux de la référence [4]. On remarque également que les résultats relatifs aux grilles 64x64 et 96x96 restent assez proches. Ainsi, et afin de minimiser les temps de calculs (notamment les calculs 3D), nous avons fixé le nombre de nœuds selon une direction d'espace à 64.

### 4 Résultats et discussion

La cavité étant remplie d'air, les simulations numériques sont effectuées avec un nombre de Prandtl égal à  $Pr = 0,71$ . Le nombre de Rayleigh varie entre  $10^3$  et  $10^6$  pour chaque configuration. Les grilles utilisées pour le cas bidimensionnel et tridimensionnel sont respectivement 64x64 et 64x64x64. Sur les figures (5a), (5e), (5f) et (5g) sont représentés les profils de température au sein de la cavité respectivement pour les configurations CF-2D, CF1-3D, CF2-3D et CF3-3D, lorsque  $Ra = 10^6$ . Pour les configurations tridimensionnelles, les profils de température au niveau du plan médian ( $z=0,5$ ) sont représentés sur les figures (5b), (5c), (5d) dans le but de faciliter la comparaison avec le cas 2D. Sur les figures (6a), (6b), (6c) et (6d) sont représentés les lignes de courant (trajectoires) de certaines particules fluides dans la moitié gauche de la cavité respectivement pour les configurations CF-2D, CF1-3D, CF2-3D et CF3-3D, pour  $Ra = 10^6$ . Afin de montrer la symétrie de l'écoulement fluide dans l'enceinte, nous avons représenté sur les

figures (6e), (6f) et (6g) les lignes de courant au sein de la cavité entière pour les configurations tridimensionnelles ( $Ra=10^6$ ). On remarque bien, à la fois grâce aux figures représentant les profils de température et celles représentant les lignes de courant que les allures les plus proches de la configuration bidimensionnelle CF-2D (figures (5a), (6a)) sont celles du cas tridimensionnel CF3-3D (figures (5d) et (6d)). Cette constatation est renforcée par les résultats mentionnés dans le tableau (2), où sont indiquées les températures maximale ( $\theta_s^{\max}$ ) à la surface de la source de chaleur et les nombres de Nusselt moyen pour chaque configuration et pour chaque nombre de  $Ra$  allant de  $10^3$  à  $10^6$ . On peut constater une différence relative moyenne entre la configuration CF-2D et les configurations CF1-3D, CF2-3D et CF3-3D respectivement de l'ordre de 9,89% , 0,23%, 0,02% pour le nombre de Nusselt moyen et respectivement de l'ordre de 8,08%, 0,25%, 0,07% pour la température maximale  $\theta_s^{\max}$ . Aussi, les figures (7a) et (7b) représentant respectivement le nombre de Nusselt moyen en fonction du nombre de Rayleigh et la température maximale  $\theta_s^{\max}$  en fonction du nombre de Rayleigh pour toutes les configurations envisagées dans cette étude confirment bien nos constatations et surtout le fait que les deux configurations tridimensionnelles CF2-3D et CF3-3D donnent des résultats nettement plus proche de la configuration 2D et la première configuration tridimensionnelle CF1-3D. Par conséquent, tous ces résultats montrent bien qu'en passant de la première configuration tridimensionnelle CF1-3D à la configuration CF3- 3D on tend vers des résultats de plus en plus proches de la configuration bidimensionnelle CF-2D.

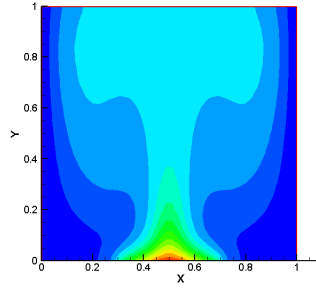


FIG. 5a – CF-2D.

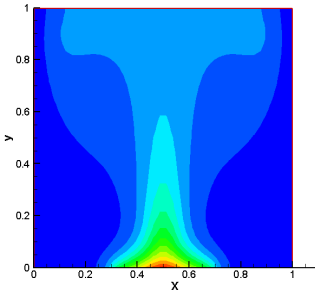


FIG. 5b – CF1-3D.

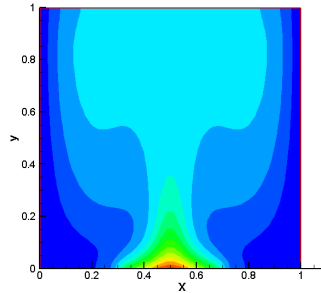


FIG. 5c – CF2-3D.

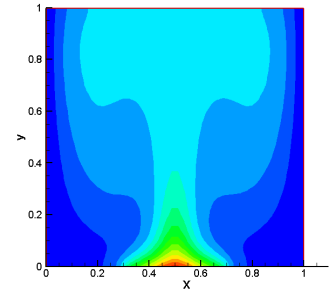


FIG. 5d – CF3-3D.

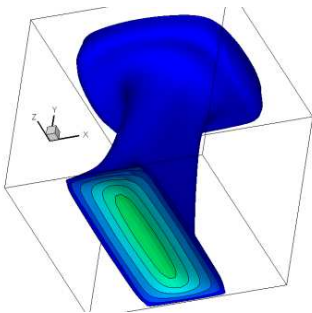


FIG. 5e – CF1-3D.

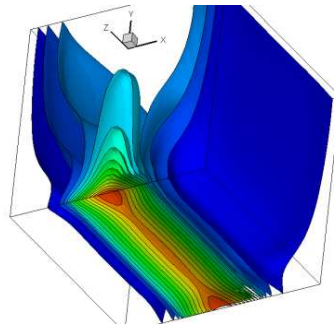


FIG. 5f – CF2-3D.

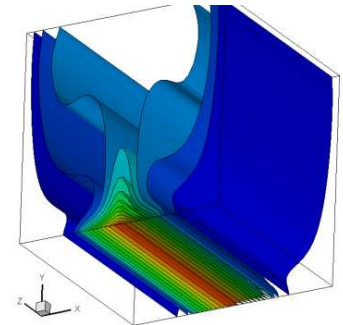


FIG. 5g – CF3-3D.

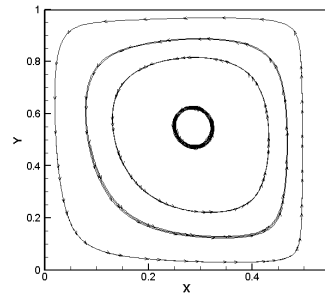


FIG. 6a – CF-2D.

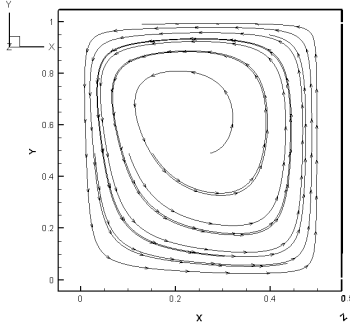


FIG. 6b – CF1-3D.

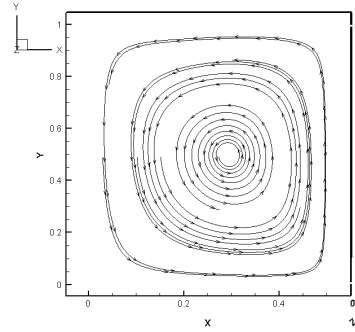


FIG. 6c – CF2-3D.

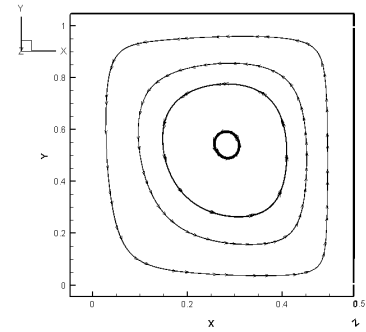


FIG. 6d – CF3-3D.

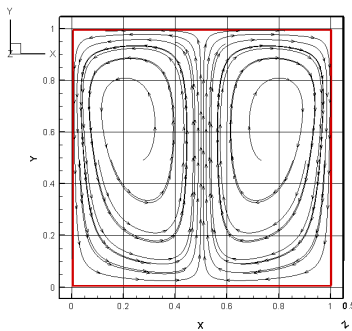


FIG. 6e – CF1-3D.

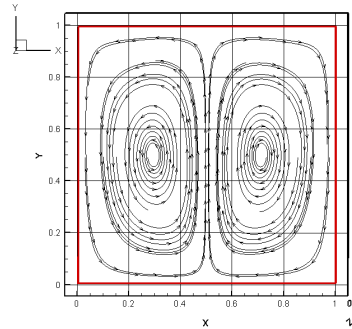


FIG. 6f – CF2-3D.

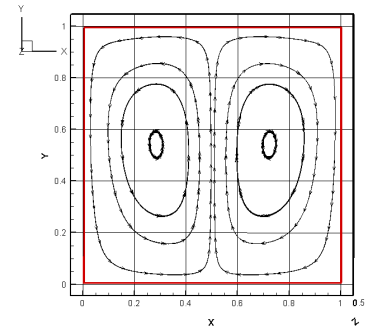


FIG. 6g – CF3-3D.

Ra		$10^3$	$10^4$	$10^5$	$10^6$
CF-2D	Nu	4,07236	4,17777	6,58188	11,289
	$\theta_s^{\max}$	0,2746	0,27309	0,19695	0,1339
CF1-3D	Nu	4,9908	4,97157	6,30921	11,53498
	Différence % (Nu)	22,55	19,0005	-4,14	2,17
	$\theta_s^{\max}$	0,225897	0,22939	0,201334	0,13279
	Différence % ( $\theta_s^{\max}$ )	-17,73	-16,002	2,22	-0,82
CF2-3D	Nu	4,07227	4,1572	6,6539	11,32831
	Différence % (Nu)	-0,002	-0,49	1,09	0,34
	$\theta_s^{\max}$	0,274593	0,274242	0,195149	0,133181
	Différence % ( $\theta_s^{\max}$ )	-0,002	0,42	-0,91	-0,53
CF3-3D	Nu	4,07235	4,17764	6,57854	11,28459
	Différence % (Nu)	-0,0002	-0,003	-0,05	-0,03
	$\theta_s^{\max}$	0,274603	0,273124	0,197139	0,134134
	Différence % ( $\theta_s^{\max}$ )	0,001	0,01	0,09	0,17

Tableau. 2 – Récapitulatif des résultats.

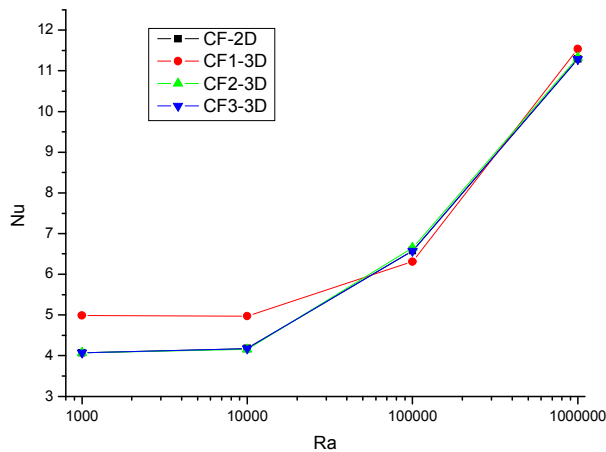


FIG. 7a – Nusselt moyen en fonction de Ra.

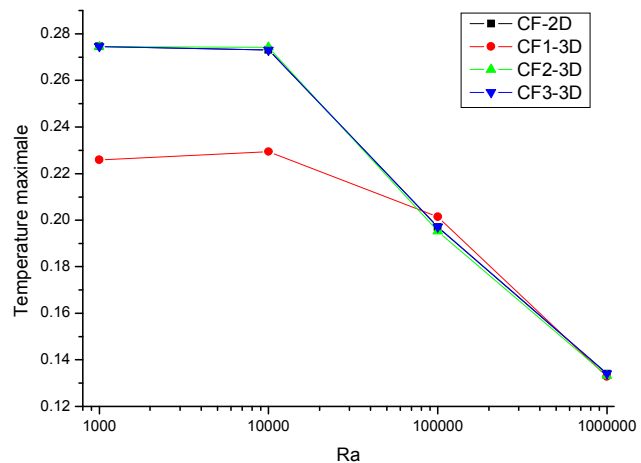


FIG. 7b – Température max en fonction de Ra.

## 5 Conclusion

Le transfert de chaleur au sein d'une cavité cubique remplie d'air, dont la paroi inférieure est partiellement chauffée par un composant électronique imposant un flux de chaleur constant au niveau de cette paroi, est étudié dans le cas bidimensionnel et tridimensionnel et cela pour différentes conditions aux limites. Pour chaque configuration des résultats numériques ont été obtenus et analysés, comme le nombre de Nusselt moyen, la température et la vitesse des particules fluides au sein de la cavité par exemple, et cela pour des valeurs du nombre de Rayleigh allant de  $10^3$  à  $10^6$ . Une comparaison des résultats numériques obtenus pour les configurations bidimensionnelles et tridimensionnelles nous a laissé conclure que la configuration CF2-3D donne des résultats plus proches de la configuration CF-2D que CF1-3D. Nous montrons aussi que la configuration CF3-3D gardant les mêmes conditions aux limites portant sur la température que CF2-3D mais avec des conditions aux limites de type glissement sur la vitesse des particules fluides au niveau des parois, permet d'obtenir des résultats nettement plus en concordance avec la configuration CF-2D. Ce qui nous permet de conclure qu'une telle configuration tridimensionnelle CF3-3D peut être assimilée à sa configuration bidimensionnelle équivalente (CF-2D).

## Références

- [1] Ganzarolli M.M., Milanez L.F., Natural convection in rectangular enclosures heated from below and symmetrically cooled from the sides, *Int. J. Heat Mass Transfer*, 38, 1063-1073, 1995.
- [2] Calgagni B., Marsili F., Paroncini M., Natural convective heat transfer in square enclosures heated from below, *Appl. Therm. Eng.*, 25, 2522-2531, 2005.
- [3] Aydin O., Yang W.J., Natural convection in enclosures with localized heating from below and symmetrical cooling from sides, *Int. J. Numer. Methods Heat Fluid Flow*, 10 (5), 519-529, 2000.
- [4] Sharif M.A.R., Mohammad T.R., Natural convection in cavities with constant flux heating at the bottom wall and isothermal cooling from the sidewalls, *Int. J. Therm. Sci.*, 44, 865-878, 2005.
- [5] Patankar S.V., *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*, MC Graw-Hill, 1982.
- [6] Achdou Y., Guermont J. L., Convergence analysis of a finite element projection / Lagrange-Galerkin method for the incompressible Naviers-Stokes equations, *SIAM Journal of Numerical Analysis*, 37, 799-826, 2000.
- [7] Ni M. J., Komori S., Morley N., Projection methods for the calculation of incompressible unsteady flows, *Num. Heat Trans. (B)*, 44, 533-551, 2003.
- [8] Hackbusch W., *Multigrid Methods and Applications*, Springer-Verlag, Berlin/New York, 1985.
- [9] Ben-Cheikh N., Ben-Beya B., Lili T., Benchmark solution for time-dependent natural convection flows with an accelerated full-multigrid method, *Num. Heat Trans. (B)*, 52 (2007) 131-151.